ENSI DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES TA

Durée : 4 heures

Remarque : La partie I est totalement indépendante des autres. Les parties II, III, IV, V sont dans une très large mesure indépendantes entre elles et peuvent être abordées séparément.

Notations : R[X] désigne l'espace vectoriel sur R des polynômes formels à coefficients réels. (Si besoin est, on identifiera un polynôme formel avec sa fonction polynôme associée.)

$R_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de R[X] constitué des polynômes de degré au plus n et du polynôme nul.

On notera enfin Vect $(P_1, P_2, ..., P_r)$ le sous-espace vectoriel de R[X] engendré par les polynômes $P_1, P_2, ..., P_r$.

Dans la première partie, E $(n/2)$ désigne la partie entière de $n/2$.

PRÉLIMINAIRES

Soit : $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ b_1 & 0 & a_2 & 0 & & & \cdot \\ 0 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & 0 & a_n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_n & 0 \end{vmatrix} = \det((\delta_{i,j}))$ avec les a_i et b_i réels non nuls.

$\delta_{i,i+1} = a_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n$

$\delta_{i,i-1} = b_i \quad 2 \leqslant i \leqslant n+1$

$\delta_{i,j} = 0$ Sinon

1° Établir une relation de récurrence entre les déterminants D_{n+1} et D_{n-1}.

2° Donner la valeur de D_n pour n entier supérieur ou égal à 1.

PREMIÈRE PARTIE

1° En utilisant les nombres complexes, démontrer que :

$$\frac{\sin((n+1)t)}{\sin t} = \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_{n+1}^{2k+1} \cdot (-1)^k \cdot (\cos t)^{n-2k} \cdot (1-\cos^2 t)^k .$$

On peut donc écrire $\sin((n+1)t) = f_n(\cos t) \cdot \sin t$ où f_n est une fonction polynomiale.

Écrire $f_n(x)$.

2° Déterminer le degré de f_n, et donner explicitement son terme de plus haut degré.

3° Démontrer que f_n est solution de l'équation différentielle :

$$(x^2-1) \cdot y'' + 3.x.y' = (n^2+2.n).y$$

(On pourra utiliser la première question.)

4° Montrer que l'application L : $P \to (x^2-1) \cdot P'' + 3.x.P' = L(P)$ définit un endomorphisme de $R_n[X]$.

5° Montrer que L est diagonalisable en donnant une base de vecteurs propres normalisés $(P_0, P_1, ..., P_n)$ et les valeurs propres associées. On vérifiera que l'on peut choisir degré de P_i égal à i et qu'il y a alors unicité.

Tournez la page S. V. P.

6° Écrire la matrice de L dans la base canonique de Rn[X] et montrer que : $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{(-1)^k}{4^k} C_{n-k}^{k} x^{n-2k}$$

(On établira une formule de récurrence permettant le calcul des coefficients de P_n.)

En déduire la valeur de S : $$S = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{(-1)^k}{4^k} C_{n-k}^{k}$$

DEUXIÈME PARTIE

Soit $T : R[X] \to R[X]$ $\quad P \longmapsto (x^2 - 1).P' - a.X.P$ où a est un réel non nul.

1° Montrer que T est un endomorphisme de R[X] et déterminer le degré de T(P) en fonction du degré p de P.
Dans les cas particuliers, s'il y en a, on donnera uniquement une majoration du degré de T(P).

2° Lorsque a n'est pas un entier naturel, montrer que T est injectif. Est-ce un automorphisme de R[X] ?

TROISIÈME PARTIE

Soit *a entier naturel non nul* et n entier non nul *avec* $n \leqslant a$.

1° Si $n < a$ étudier si la restriction F de T à Rn[X] (F : Rn[X] → R[X]) définit un endomorphisme de Rn[X], puis si cette restriction est injective.

2° Montrer que la restriction de T à Ra[X] définit un endomorphisme de Ra[X] que l'on notera désormais Ta. Donner un encadrement le meilleur possible du rang de l'endomorphisme Ta.

3° Écrire la matrice de Ta dans la base canonique de Ra[X] et étudier le rang de Ta.

QUATRIÈME PARTIE

Soit *a entier naturel non nul* et n entier *avec* $a < n$ et F la restriction de T à Rn[X]. (F : Rn[X] → R[X]).

1° F définit-elle un endomorphisme de Rn[X] ?

2° En remarquant que Rn[X] = Ra[X] ⊕ Vect $(x^{a+1}, x^{a+2}, ..., x^n)$.
Montrer que F (Rn[X]) = F (Ra[X]) ⊕ F (Vect $(x^{a+1}, x^{a+2}, ..., x^n)$).

3° Déterminer la dimension de F (Rn[X]), puis déterminer le noyau de F.

CINQUIÈME PARTIE

1° Déduire des parties II, III, IV le rang de l'application L de la question I.

2° On définit l'application B : $\quad R_n[X] \times R_n[X] \to R$

$$(P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^{1/2} . P(x) . Q(x) . dx = B(P, Q).$$

Montrer que l'on définit ainsi sur Rn[X] une structure d'espace vectoriel euclidien.

3° Montrer que pour tous polynômes P et Q de Rn[X] :

$$B(P, L(Q)) = B(L(P), Q)$$

4° Montrer que pour p et q entiers distincts inférieurs à n :

$$B(P_p, P_q) = 0$$

où les P_i sont les polynômes définis à la première partie.
Que peut-on alors dire de la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$?

5° Montrer que pour tout polynôme Q de degré strictement plus petit que n :

$$B(Q, P_n) = 0$$

Si R est un polynôme de Rn[X], donner une expression de ses coordonnées dans la base $(P_0, P_1, ..., P_n)$.

6° Comment peut-on interpréter les résultats obtenus pour l'endomorphisme L au vu de cette partie ?